

08

Teorías canónicas del campo electromagnético

En este capítulo, se estudiará la generalización de las ecuaciones clásicas de Hamilton y de los corchetes de Poisson, y veremos que las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar también de un hamiltoniano asociado al campo electromagnético. En el vacío, veremos también, que las ecuaciones de movimiento son análogas a las de un campo de osciladores, que nos permitirá la descomposición del campo en ondas planas y estudiar la propagación y dispersión de las ondas electromagnéticas. Esto nos permitirá también explicar la validez de los modelos mecanicistas de la propagación del campo electromagnético y de la luz.

Debido a la polarización circular de las ondas electromagnéticas, veremos que el campo, además de una densidad de energía y de momento, produce una presión de radiación, y que también posee otra magnitud conservativa relacionada con el momento angular de espín clásico.

De las relaciones de conmutación de los corchetes de Poisson del campo de osciladores, veremos que se deriva un principio de no localización y dispersión de las ondas del campo electromagnético, que es el origen de los fenómenos de difracción.

Basándose en la teoría de De Broglie de que las partículas materiales tienen también asociada también una onda, Schrödinger siguiendo la analogía de la eikonal en óptica, formuló la teoría de la mecánica cuántica clásica que lleva su nombre. Hasta el presente se ha evidenciado que toda la naturaleza obedece las leyes de la mecánica cuántica, las cuales también aplican a la luz.

Ecuaciones canónicas para densidades de campo

Sea una densidad lagrangiana que depende de unas funciones de campo y de sus derivadas $\mathcal{L}(\phi^\beta(x^\alpha), \phi^\beta_{,\sigma}(x^\alpha), x^\alpha)$, que cumple con las condiciones de campo de Lagrange-Euler

$$E_\beta \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}_\beta - \partial_\alpha \mathcal{L}^\alpha_\beta = 0$$

Se define la derivada funcional de $\mathcal{L}$ respecto a ϕ^β

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\beta} - \frac{d}{dx^\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\beta_{,\alpha}} \right) = \mathcal{L}_\beta - \partial_\alpha \mathcal{L}^\alpha_\beta$$

Con lo que la ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden representar simbólicamente también como la anulación de la derivada funcional

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^\beta} = 0$$

Por x^α se representa el sistema de coordenadas en un espacio cuatridimensional de Minkowski

$$\bar{x} = x^\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, x, y, z)$$

En adelante, el índice β quedará reservado para designar solamente al conjunto de funciones de campo $\phi^\beta(x^\alpha)$.

Se define el momento conjugado del campo por

$$\Pi^\alpha_\beta = L^\alpha_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\beta_{,\alpha}}$$

El tensor de energía-momento canónico del campo será

$$\check{T}^\mu_\sigma = \Pi^\mu_\beta \phi^\beta_{,\sigma} - \delta^\mu_\sigma \mathcal{L}$$

El signo se ha escogido para que $\check{T}^{00}$ sea positivo, y de forma que la densidad de fuerza producida por el campo sea

$$f^\alpha = -\partial_\mu \check{T}^{\alpha\mu}$$

Si en la primera ecuación, que define el momento, se puede resolver $\phi^\beta_{,\alpha}$ en función de Π^α_β , entonces sustituyendo en la anterior ecuación el tensor de energía-momento canónico será una función de la forma

$$\check{T}^\alpha_\beta = \check{T}^\alpha_\beta(\phi^\beta, \Pi^\alpha_\beta, x^\alpha)$$

Manteniendo a ϕ^β , Π^α_β como variables independientes, se verificará

$$\frac{\partial \check{T}^\mu_\sigma}{\partial \Pi^\mu_\beta} = \phi^\beta_{,\sigma}$$

$$\frac{\partial \check{T}^\mu_\sigma}{\partial \phi^\beta} = -\delta^\mu_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\beta} = -\delta^\mu_\sigma \Pi^\tau_{\beta,\tau}$$

Las anteriores expresiones son la forma canónica covariante de la ecuación de Hamilton para campos, que desempeña un papel análogo a la mecánica clásica discreta.

Sin embargo la forma covariante $\check{T}^{\mu\sigma}$ no tiene el significado de energía como en mecánica.

Si se define como la densidad Hamiltoniana de energía

$$\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} \check{T}^{00}$$

Teniendo en cuenta que

$$\check{T}^0_0 = \Pi^0_\beta \phi^\beta_{,0} - \mathcal{L} \quad \rightarrow \quad \mathcal{H} = \phi^{0\alpha} \Pi^0_{\beta} \phi^\beta_{,\alpha} - \mathcal{L}$$

se verificará

$$\frac{\partial \check{T}^0_0}{\partial \Pi^0_\beta} = \phi^\beta_{,0} = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^0}$$

$$\frac{\partial \check{T}^0_0}{\partial \phi^\beta} = \frac{\partial \Pi^0_\beta}{\partial x^\mu} \Rightarrow \frac{\partial \Pi^0_\beta}{\partial x^0} = -\frac{\partial \check{T}^0_0}{\partial \phi^\beta} - \frac{\partial \Pi^i_\beta}{\partial x^i}$$

Entonces las anteriores ecuaciones se pueden poner de la reescribir de la forma

$$\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^0} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi^0_\beta}$$

$$\frac{\partial \Pi^0_\beta}{\partial x^0} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi^\beta}$$

Las dos anteriores ecuaciones tienen la forma canónica habitual en mecánica, con ϕ^β como coordenadas y Π^0_β como los momentos canónico conjugados. Sin embargo no son ecuaciones covariantes, aunque son relativísticamente invariantes en su forma.

Evidentemente se verifica

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

y, si la lagrangiana no depende de $x^0 = ct$, entonces $H = \int \mathcal{H} dV$ no dependerá del tiempo y será una constante conservativa. Si además, la lagrangiana no depende de ϕ^β , habrá unas corrientes conservativas y $\int \Pi^0_\beta dV$ será independiente del tiempo.

Corchetes de Poisson de campo y representación en ondas planas

Una densidad arbitraria

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \int \mathcal{U}(\phi^\beta, \Pi^0_\beta) d^3x$$

varíara con el tiempo de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx^0} &= \int_{V_\infty} \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \phi^\beta} \frac{\delta \phi^\beta}{\delta x^0} + \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \Pi^0_\beta} \frac{\delta \Pi^0_\beta}{\delta x^0} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^0} \right) d^3x = \\ &= \int_{V_\infty} \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \phi^\beta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi^0_\beta} - \frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \Pi^0_\beta} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi^\beta} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^0} \right) d^3x \end{aligned}$$

donde se ha hecho una integración por partes y se ha supuesto que los campos en el infinito son nulos.

La anterior expresión que se puede reescribir como

$$\frac{dU}{dx^0} = \frac{\partial U}{\partial x^0} + \{U, H\}$$

donde se ha definido el corchete de Poisson de dos densidades funcionales $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ por

$$\{F, G\} = \int_{V_\infty} \{F, G\} d^3x \stackrel{\text{def}}{=} \int_{V_\infty} \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \phi^\beta} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \Pi^0_\beta} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Pi^0_\beta} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \phi^\beta} \right) d^3x$$

Es fácil comprobar que verifican las relaciones de conmutación fundamentales

$$\begin{aligned} \{\phi^{\beta_1}(\bar{x}_1), \phi^{\beta_2}(\bar{x}_2)\} &\equiv 0 & \{\Pi^0_{\beta_1}(\bar{x}_1), \Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2)\} &\equiv 0 \\ \{\phi^{\beta_1}(\bar{x}_1), \Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2)\} &= \delta^{\beta_1}_{\beta_2} \delta(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \end{aligned}$$

De las relaciones de conmutación fundamentales, se pueden deducir otras derivadas, como por ejemplo

$$\begin{aligned} \left\{ \phi^{\beta_1}(\bar{x}_1), \left(\Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2) \right)^2 \right\} &= \left\{ \Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2) \phi^{\beta_1}(\bar{x}_1) + \delta^{\beta_1}_{\beta_2} \delta(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \right\} \Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2) - \left(\Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2) \right)^2 \phi^{\beta_1}(\bar{x}_1) \\ &= \Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2) \left\{ \Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2) \phi^{\beta_1}(\bar{x}_1) + \delta^{\beta_1}_{\beta_2} \delta(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \right\} + \delta^{\beta_1}_{\beta_2} \delta(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \left(\Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2) \right)^2 \phi^{\beta_1}(\bar{x}_1) \\ &= 2\delta^{\beta_1}_{\beta_2} \delta(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \Pi^0_{\beta_2}(\bar{x}_2) \end{aligned}$$

La aparición de la función Delta de Dirac, es la diferencia entre la mecánica discreta y las funciones de campo continuas.

Las ecuaciones Hamilton, se puede describir en función de los corchetes de Poisson como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^0} &= \{ \phi^\beta, \mathcal{H} \} \\ \frac{\partial \Pi_\beta^0}{\partial x^0} &= -\{ \Pi_\beta^0, \mathcal{H} \}\end{aligned}$$

En función del tensor de energía-momento, podemos definir las densidades de momento asociadas habituales

$$\begin{aligned}\tilde{T}^\mu_\sigma &= \Pi^\mu_\beta \phi^\beta_{,\sigma} - \delta^\mu_\sigma \mathcal{L} \\ P^0 &= \int_{V_\infty} \tilde{T}^{00} d^3x = \int_{V_\infty} \mathcal{H} d^3x = H \\ cP^k &= \int_{V_\infty} \tilde{T}^{0k} d^3x = \int_{V_\infty} \Pi^\beta_\beta \partial^k \phi^\beta d^3x \\ cJ^{0k} &= \int_{V_\infty} (x^0 \tilde{T}^{0k} - x^k \tilde{T}^{00}) d^3x = ctP^k - \int_{V_\infty} x^k \mathcal{H} d^3x \\ cJ^{ik} &= \int_{V_\infty} (x^i \tilde{T}^{0k} - x^k \tilde{T}^{0i}) d^3x = \int_{V_\infty} (x^i \Pi^\beta_\beta \partial^k \phi^\beta - x^k \Pi^\beta_\beta \partial^i \phi^\beta) d^3x\end{aligned}$$

Los corchetes de Poisson serán entonces

$$\begin{aligned}\{ \phi^\beta, P^0 \} &= \int_{V_\infty} \{ \phi^\beta, \mathcal{H} \} d^3x = \frac{1}{c} \partial_t \phi^\beta \\ \{ \phi^\beta, P^k \} &= \frac{1}{c} \int_{V_\infty} \{ \phi^\beta, \Pi^\beta_\beta \partial^k \phi^\beta \} d^3x = -\partial_k \phi^\beta \\ \{ \phi^\beta, J^{0k} \} &= \frac{1}{c} \int_{V_\infty} \{ \phi^\beta, (x^0 \tilde{T}^{0k} - x^k \tilde{T}^{00}) \} d^3x = -\frac{1}{c} x^k \partial_t \phi^\beta + t \partial_k \phi^\beta \\ \{ \phi^\beta, J^{ik} \} &= \frac{1}{c} \int_{V_\infty} \{ \phi^\beta, (x^i \Pi^\beta_\beta \partial^k \phi^\beta - x^k \Pi^\beta_\beta \partial^i \phi^\beta) \} d^3x = x^i \partial_k \phi^\beta - x^k \partial_i \phi^\beta\end{aligned}$$

Al igual que en mecánica clásica, los corchetes de Poisson son constantes en el tiempo sobre una curva extremal que verifique las ecuaciones de Euler-Lagrange. Por tanto, una magnitud se conserva en el tiempo, si no depende explícitamente del tiempo y su corchete de Poisson con el hamiltoniano se anula. También el corchete de Poisson de dos magnitudes conservativas es también otra constante de movimiento.

Además si $\mathcal{G}$ es una densidad conservativa cuyo corchete de Poisson con la densidad hamiltoniana se anula, también será el generador de una transformación infinitesimal invariante.

$$\delta F = \int_{V_\infty} \left\{ \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \varnothing^\beta} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \Pi^0_\beta} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \Pi^0_\beta} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \varnothing^\beta} \right\} d^3x$$

Si el sistema es invariante ante traslaciones de la dirección k

$$\frac{dP^k}{dx^0} = \int_{V_\infty} \{P^k, \mathcal{H}\} d^3x = -\partial_k \mathcal{H} = 0$$

y por tanto se conserva el momento total P^k .

De igual forma, la invarianza ante rotaciones ante un eje de dirección $\vec{n}$ lleva a la conservación de la proyección del momento angular $J^k = \epsilon_{ijk} J^{jk}$ sobre el eje de rotación, y la invarianza ante las traslaciones temporales lleva aparejado la conservación del centro de energía representado por J^{0k} y P^0 .

Sin embargo, la analogía con la mecánica discreta no es completa, ya que Π^0_β es una densidad, pero $\varnothing^\beta$ no lo es ya que son variables de campo.

Para obviar esta dificultad, se supone que el campo fuera de un volumen $V = L^3$ lo suficientemente grande es nulo, por lo que se puede imponer sin restricción la condición de periodicidad

$$\varnothing^\beta(x, y, z) = \varnothing^\beta(x + L, y + L, z + L)$$

De esta forma, se puede hacer un desarrollo serie de Fourier en ondas planas

$$\varnothing^\beta(x^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_n} \left(q_{\vec{k}_n}^\beta(x^0) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} + q_{-\vec{k}_n}^{*\beta} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} \right)$$

siendo $\vec{k}_n = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3)$ donde n_i son números enteros positivos. Por n representamos al conjunto $n = (n_1, n_2, n_3)$.

Para que la función de campo sea real deberá verificarse

$$q_{-\vec{k}_n}^\beta = q_{\vec{k}_n}^{*\beta}$$

Según el capítulo de teorías espectrales, esto equivale a tomar como base para el desarrollo de las funciones a

$$\langle x | \varphi_{\vec{k}_n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_n} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}}$$

Nos será útil la siguiente relación de ortogonalidad

donde $\delta_{\vec{k}_n, \vec{k}_{n'}} = 0$ si $\vec{k}_n \neq \vec{k}_{n'}$ y $\delta_{\vec{k}_n, \vec{k}_{n'}} = 1$ si $\vec{k}_n = \vec{k}_{n'}$, y

$$\frac{1}{V} \int_{V_\infty} e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_{n'}) \cdot \vec{x}} d^3x = \delta_{\vec{k}_n, \vec{k}_{n'}}$$

que es equivalente a relación de complitud

$$\int_{V_\infty} \langle x | \varphi_k \rangle \langle \varphi_k | x \rangle d^3x = \delta_{\vec{k}_n, \vec{k}_{n'}}$$

ya que a partir de ella podemos invertir la ecuación anterior, verificándose

$$q_{\vec{k}}^\beta(x^0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_{V_\infty} \phi^\beta(\vec{x}, x^0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x$$

Esto es equivalente a las integrales de Fourier estudiadas en el capítulo de teorías espectrales, cuando se hace $L \rightarrow \infty$ y el cambio

$$\frac{2\pi n_i}{L} \rightarrow k_{n_i} \quad \sum_{k_i} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} dn_i = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^i \quad q_{\vec{k}_n}^\beta \rightarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \phi^\beta(\vec{k}, x^0)$$

De igual forma podemos desarrollar en serie de Fourier el momento

$$\Pi_\beta^0(x^0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}_n} (p_{\vec{k}_n\beta}(x^0) e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} + p_{\vec{k}_n\beta}^* e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}})$$

siendo

$$p_{\vec{k}_n\beta}(x^0) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_{V_\infty} \Pi_\beta^0(\vec{x}, x^0) e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} d^3x$$

Con estas definiciones, se verifica

$$\begin{aligned} \{q_{\vec{k}_n}^\beta, q_{\vec{k}_{n'}}^{\beta'}\} &= \{p_{\vec{k}_n\beta}, p_{\vec{k}_{n'}\beta'}\} = 0 \\ \{q_{\vec{k}_n}^\beta, p_{\vec{k}_{n'}\beta'}\} &= \delta_{\vec{k}_n, \vec{k}_{n'}} \delta_{\beta, \beta'} \end{aligned}$$

Además como se verifica

$$\frac{dq_{\vec{k}_n}^\beta}{dx^0} = \{q_{\vec{k}_n}^\beta, H\} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_{V_\infty} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_\beta^0} e^{-i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} d^3x$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\vec{k}_n\beta}} = \int_{V_\infty} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_\sigma^0} \frac{\partial \Pi_\sigma^0}{\partial p_{\vec{k}_n\beta}} d^3x = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_{V_\infty} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_\beta^0} e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{x}} d^3x$$

obtenemos finalmente las ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dq_{\vec{k}_n}^\beta}{dx^0} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\vec{k}_n\beta}} \\ \frac{dp_{\vec{k}_n\beta}}{dx^0} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{\vec{k}_n}^\beta} \end{aligned}$$

Por tanto, $q_{\vec{k}_n}^\beta$ y $p_{\vec{k}_n\beta}$ obedecen a las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

Las ecuaciones de Hamilton son equivalentes a las ecuaciones armónicas

270

Ecuaciones canónicas y corchetes de Poisson del campo electromagnético

Ya hemos visto en el capítulo de teorías variacionales, que la lagrangiana de una carga puntual no relativista en un campo electromagnético hemos visto que viene dada por

$$L = \int_{V_\infty} \mathcal{L} d^3x = \int_{V_\infty} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \left(\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi \right)^2 + c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 \right) - \rho \phi + \rho \vec{A} \cdot \vec{v} + \frac{\rho_m}{2} \vec{v}^2 \right) d^3x$$

siendo para una carga puntual

$$\begin{aligned} \rho_m(\vec{x}, t) &= m_0 \rho \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \\ \rho(\vec{x}, t) &= q \rho \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= \rho \vec{v} \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \end{aligned}$$

Donde $\vec{x}_r(t)$ es la posición y $\vec{v}_r = d\vec{x}_{pr}/dt$ la velocidad de la partícula.

La parte de la lagrangiana correspondiente al campo electromagnético libre mas la interacción con la materia $\mathcal{L}_{em} = \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_i$ vimos tiene la forma

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{\epsilon_0}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{c} J^\alpha \mathcal{A}_\alpha = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2) + \frac{\epsilon_0}{2} ((\vec{\nabla} \phi + \partial_t \vec{A})^2 - c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones de Euler-Lagrange podemos escribir para una partícula no relativista

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \int \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{\mathcal{A}}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{\mathcal{A}}_t} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}_r} \cdot \frac{d\vec{x}_r}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_r} \cdot \frac{d\vec{v}_r}{dt} \right) d^3x \\ &= \frac{d}{dt} \int \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{\mathcal{A}}_t} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_r} \cdot \vec{v}_r \right) d^3x\end{aligned}$$

Tanto las ecuaciones de Lagrange-Euler, como las ecuaciones canónicas para la posición $\vec{x}_r$ llevan a la ecuación a la ecuación dinámica de la fuerza de Lorentz, por lo que nos limitaremos a las variables del campo electromagnético.

Para llevar la lagrangiana a la forma canónica se definen los momentos canónicos Π^0_β asociados a las variables de campo ϕ^β , que en este caso son las componentes del cuadrivector de los potenciales electromagnético $\vec{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}^\beta) = (\phi, c\vec{A}^i)$. Para componente espacial será

$$\Pi^{0i} = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathcal{A}_{i,0}} = -\varepsilon_0 \mathcal{F}^{0i}$$

Es habitual definir este momento en una forma vectorial

$$\vec{\Pi}_{\vec{\mathcal{A}}} \stackrel{\text{def}}{=} (\Pi^0_i) = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \vec{\mathcal{A}}_t} = -\varepsilon_0 \mathcal{F}^{0i} = -\varepsilon_0 (\partial_i \mathcal{A}^0 - \partial_t \mathcal{A}^i) = -\varepsilon_0 \vec{E}$$

271

donde por $i = 1, 2, 3$, designaremos las coordenadas espaciales.

Recordemos que en la notación covariante la subida y bajada de índices sigue la regla

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^\alpha &= (\phi, c\vec{A}) \\ \mathcal{A}_\alpha &= g_{\alpha\mu} \mathcal{A}^\mu = (\phi, -c\vec{A})\end{aligned}$$

La componente temporal ϕ tiene como momento canónico asociado

$$\Pi^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \mathcal{A}_{0,0}} = c \frac{\partial \mathcal{L}_{em}}{\partial \phi_t} \equiv 0$$

que se suele representar como

$$\Pi_\phi \equiv 0$$

El momento canónico asociado a la partícula viene como es habitual por

$$\vec{\Pi}_r \equiv \vec{p}(\vec{x}_r, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_r} = m_0 \vec{v} + q \vec{A}(\vec{x}_r, t)$$

Los significados del campo electromagnético

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo electromagnético vienen dadas anulando las derivadas funcionales de las variables del campo

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathcal{A}_\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\beta} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_{\beta,\alpha}} = \frac{1}{c} J^i + \varepsilon_0 \partial_\alpha \mathcal{F}^{i\alpha} = 0$$

que para $\beta = i$ nos da la ecuación dinámica de la ley de Ampère, y

$$\vec{J} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

y para $\beta = 0$ se obtiene

$$\rho + \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

que corresponde a la ley de Gauss

$$\rho - \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Puesto que además se verifica que

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \mathcal{A}_{0,0}} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_t} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_t} = 0$$

Vemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange para el potencial ϕ , no son ecuaciones dinámicas, y que la ley de Gauss es más bien una restricción a la distribución espacial del potencial que se debe aplicar a todos instantes del tiempo.

La densidad hamiltoniana del campo electromagnético libre viene dada por

$$\mathcal{H}_c = \check{T}^{00} = \Pi^0_i \frac{\partial c A^i}{\partial x^0} - \mathcal{L}_{em} = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0} (\vec{\Pi}_A)^2 - \vec{\Pi}_A \cdot \vec{\nabla} \cdot \phi$$

El último término se puede eliminar ya que no contribuye en la integral de volumen para H

$$\int_{V_\infty} \vec{\Pi}_A \cdot \vec{\nabla} \phi d^3x = -\varepsilon_0 \int_{S_\infty} (\phi \vec{E}) \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \int_{V_\infty} \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3x = 0$$

Por tanto la densidad de energía del campo electromagnético será

$$\mathcal{H}_c = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0} (\vec{\Pi}_A)^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)$$

ya que, en el vacío, en ausencia de fuentes, el segundo término se anula al integrarse por partes al hacer la integral de volumen para obtener la hamiltoniana total H_c , que corresponde con la energía total del campo electromagnético

$$H_c = \int_{V_\infty} \mathcal{H}_c d^3x = \int_{V_\infty} \tilde{T}^{00} d^3x = \mathcal{W}_c$$

El hamiltoniano total vendrá entonces dado por

$$H = \int_{V_\infty} \mathcal{H} d^3x = \int \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \vec{A}_t} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}_r} \cdot \vec{v}_r - \mathcal{L} \right) d^3x$$

siendo la densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2\epsilon_0} \vec{\Pi}_A^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 + \rho \phi + \frac{1}{2\rho_m} (\vec{\Pi}_r - \rho \vec{A})^2 - \vec{\Pi}_A \cdot \vec{\nabla} \phi$$

El término con $\vec{\nabla} \phi$ puede omitirse ya que da una contribución nula en el infinito cuando se hace la integral a todo el espacio.

Habitualmente a $\vec{\Pi}_r$ para una sola partícula se le denomina $\vec{p}$.

Este hamiltoniano es invariante ante una transformación gauge de los potenciales electromagnéticos ya que $\vec{p} - q\vec{A} = m_0\vec{v}$ lo es.

Para un sistema cerrado estacionario independiente del tiempo, y considerando que contribuciones en el infinito se anulan, la energía total que se identifica con el hamiltoniano, será una constante independiente del tiempo

$$E \equiv H = \text{Constante}$$

Este hamiltoniano es invariante ante una transformación gauge de los potenciales electromagnéticos ya que $\vec{p} - q\vec{A} = m_0\vec{v}$ lo es.

Las ecuaciones canónicas de evolución de las variables de campo $\vec{A}$ serán

$$\frac{\partial cA^i}{\partial x^0} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_A^0} = \frac{1}{\epsilon_0} \Pi_A^0 - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = -E^i - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \vec{\Pi}_A} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\Pi}_A} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}_A - \vec{\nabla} \phi$$

que es equivalente a

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

y las ecuaciones canónicas de evolución de los momentos asociados

$$\frac{\partial \Pi_i^0}{\partial x^0} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta c A^i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\Pi}_{\vec{A}}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{A}} - \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{B}} = \rho \vec{v} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

que representa la ley de Ampère.

Para el momento canónico de $\emptyset$ tenemos

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \emptyset}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_{\emptyset}} \equiv 0$$

ya que es $\Pi_{\emptyset} \equiv 0$, lo que nos indica otra vez que $\emptyset$ no es realmente una variable dinámica. Además

$$\frac{\partial \Pi_{\emptyset}}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \emptyset} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \emptyset} + \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{\nabla} \emptyset} = -\rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_{\vec{A}} = -\rho + \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \equiv 0$$

que es la ley de Gauss, nos también indica que $\Pi_{\emptyset}$ tampoco es una variable dinámica, y que la ecuación de Gauss es una ecuación de construcción que se debe cumplir para todo tiempo instante de tiempo t .

En realidad ley de Gauss no puede derivarse de las ecuaciones canónicas de Hamilton de movimiento. De las ecuaciones canónicas si se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_{\vec{A}} = \vec{\nabla} \cdot \left(\rho \vec{v} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \right) = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

y entonces será

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \rho = C$$

donde C es una función que no depende del tiempo. Que sea $C = 0$ es una restricción externa al método hamiltoniano.

El que $\mathcal{L}$ no contenga la variable $\emptyset_t$ y sea $\partial \mathcal{L} / \partial \emptyset_t \equiv 0$ indica que $\emptyset$ no es una variable dinámica o de propagación, y su inclusión en el sistema es equivalente introducir una descripción de acción mecánica de acción a distancia.

Ya hemos visto en teorías vectoriales, que toda la electrodinámica se puede formular en función de la componente transversal del potencial vector, y del potencial instantáneo de Coulomb de las cargas.

La presencia de campos no dinámicos hace que el determinante la matriz Hessiana de la lagrangiana sea singular

$$\det \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{em}}{\partial A_{,t}^{\alpha} \partial A_{,t}^{\beta}} \right] \equiv 0$$

y por tanto, no existe la función inversa de las A_t^a en función de los momentos Π_a^0 , condición que realmente se exigiría para poder expresar el hamiltoniano en función solo de las variables de campo y de sus momentos canónicos asociados.

La existencia de esta singularidad es también el origen de que existan unas transformaciones gauge de los potenciales electromagnéticos. Si el número de variables dinámicas y r es el rango de la matriz Hessiana, entonces las soluciones del sistema contendrán $N - r$ funciones arbitrarias de las variables y de sus derivadas y existirá invarianza gauge local.

En el sistema electromagnético $N = 4$ y $r = 3$, por lo que los potenciales dependerán de una función arbitraria que da lugar al gauge electromagnético ya visto en anteriores capítulos.

Esta restricción es equivalente a las condiciones de las de Lipschitz para que la fuerza de Lorentz sea una fuerza conservativa que ya vimos en el capítulo de teorías dinámicas.

Garay hace la observación de que la ley de Gauss, puesto que es una ecuación de restricción que se conservativa, se puede considerar como el generador $\mathcal{G}$ de un transformación de los potenciales

$$\mathcal{G} = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_A$$

El corchete de Poisson para un mismo instante verifica

$$\begin{aligned} \{A^k, \delta \Lambda \mathcal{G}\} &= \int_{V_\infty} \{A^k(\vec{x}, t), \delta \Lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_A(\vec{x}, t)\} d^3x \\ &= \int_{V_\infty} \delta \Lambda(\vec{x}, t) \{A^k(\vec{x}, t), \delta \Lambda \partial_i \Pi_A^i(\vec{x}, t)\} d^3x = \int_{V_\infty} \delta \Lambda(\vec{x}, t) \partial_i \{A^k(\vec{x}, t), \Pi_A^i(\vec{x}, t)\} d^3x \\ &= \int_{V_\infty} \delta \Lambda(\vec{x}, t) \delta^{ki} \partial_i \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' = - \int_{V_\infty} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \partial_k \delta \Lambda(\vec{x}, t) d^3x' = - \partial_k \delta \Lambda(\vec{x}, t) = \delta A^k \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{L}_c = \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2)$ se obtiene el tensor de energía impulso del campo electromagnético libre tendrá como componentes

$$\tilde{T}_c^{\mu\sigma} = \Pi^\mu_\beta \phi^\beta_{,\sigma} - \delta^\mu_\sigma \mathcal{L}_c \quad \text{o} \quad \tilde{T}^{\mu\sigma} = g^{\sigma\alpha} \Pi^\mu_\beta \phi^\beta_{,\alpha} - g^{\sigma\mu} \mathcal{L}_c$$

$$\tilde{T}_c^{00} = \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) + \partial_i (\phi E^i)$$

$$\tilde{T}_c^{0k} = c \varepsilon_0 \varepsilon_{kjl} E^j B^l + c \varepsilon_0 \partial_i (A^i E^k)$$

$$\tilde{T}_c^{k0} = c \varepsilon_0 \varepsilon_{kjl} E^j B^l + c \varepsilon_0 \varepsilon_{kjl} \partial_j (\phi B^l) - \varepsilon_0 \partial_t (\phi E^k)$$

Los corchetes de Poisson para el campo electromagnético en función de los potenciales dependerá del gauge escogido, por lo que en el vacío es conveniente utilizar el gauge de Coulomb en que se anula $\emptyset$.

Sin embargo, los corchetes de Poisson en función de las componentes del campo electromagnético $\vec{E}$ o $\vec{B}$ si serán independientes del gauge escogido. Teniendo en cuenta que es $\epsilon_0 \vec{E} = -\vec{\Pi}_A$, se obtiene a partir de las relaciones de conmutación fundamentales

$$\{E^k(\vec{x}_1, t), E^l(\vec{x}_2, t)\} = \{B^k(\vec{x}_1, t), B^l(\vec{x}_2, t)\} = 0$$

$$\{E^k(\vec{x}_1, t), B^l(\vec{x}_2, t)\} = -\frac{1}{\epsilon_0} \left\{ \Pi_A^k(\vec{x}_1, t), \epsilon_{lim} \frac{\partial}{\partial x_2^i} A^m(\vec{x}_2, t) \right\} = -\frac{(1 - \delta^{kl})}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x_2^m} \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

donde (k, l, m) forman una permutación cíclica.

Vemos que solo conmutan y se anula el corchete de Poisson cuando las $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son iguales. Utilizando la anterior expresión, vemos que también se verifica

$$\{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{x}, t), B^l(\vec{x}, t)\} = 0$$

Puesto que además $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ conmuta con $\vec{E}$ y H , será por tanto una constante de movimiento independiente del tiempo, y por tanto será siempre si en algún instante se anula, resultado que ya habíamos obtenido anteriormente.

Los corches de Poisson son también una forma alternativa equivalente de definir las ecuaciones de movimiento.

A partir de las relaciones de conmutación de los corchetes de Poisson fundamentales antes obtenidos se pueden también derivar las ecuaciones de Maxwell de la ley de Ampère y Faraday en el vacío sin fuentes

$$\begin{aligned} \partial_t E^k(\vec{x}, t) &= \{E^k, H\} = \int_{V_\infty} \{E^k(\vec{x}, t), \mathcal{H}_c(\vec{x}', t)\} d^3x' \\ &= -c^2 \int_{V_\infty} (B^m \partial_l - B^l \partial_m) \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' \\ &= c^2 \int_{V_\infty} \delta(\vec{x} - \vec{x}') (\partial_l B^m - \partial_m B^l) d^3x = c^2 (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})^k \end{aligned}$$

De igual forma se obtiene para el campo de inducción magnética

$$\partial_t B^k(\vec{x}, t) = \{B^k, H\} = \int_{V_\infty} \{B^k(\vec{x}, t), \mathcal{H}_c(\vec{x}', t)\} d^3x' = -(\vec{\nabla} \wedge \vec{E})^k$$

En el caso electromagnético, el potencial vector cumple con las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) = \{\vec{A}, H\} &= \int_{V_\infty} \{\vec{A}(\vec{x}, t), \mathcal{H}_c(\vec{x}', t)\} d^3x' = \int_{V_\infty} \left\{ \vec{A}(\vec{x}, t), \frac{1}{2\varepsilon_0} \vec{\Pi}_A^2(\vec{x}', t) \right\} d^3x' \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V_\infty} \vec{\Pi}_A(\vec{x}', t) \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\Pi}_A(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

que corresponde a las ecuaciones de movimiento obtenidas anteriormente con $\emptyset = 0$, que habíamos eliminado de $\mathcal{H}_c$, y por tanto son aplicables para el gauge de Coulomb.

Mediante un cálculo similar, se obtiene para el momento canónico la ecuación de su evolución con el tiempo

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{\Pi}_A(\vec{x}, t) = \{\vec{\Pi}_A, H\} &= \int_{V_\infty} \{\vec{\Pi}_A(\vec{x}, t), \mathcal{H}_c(\vec{x}', t)\} d^3x' = \int_{V_\infty} \left\{ \vec{\Pi}_A(\vec{x}, t), \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2 \right\} d^3x' \\ &= -\varepsilon_0 c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\end{aligned}$$

Ambas ecuaciones son las mismas que ya obtuvimos anteriormente mediante las ecuaciones de Hamilton.

En función de las ondas planas, el hamiltoniano vendrá dado por

$$H_c = \sum_{\vec{k}_n} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} p_{\vec{k}_n \beta} p_{\vec{k}_n \beta}^* + \varepsilon_0 \vec{k}_n^2 q_{\vec{k}_n}^\beta q_{\vec{k}_n}^{* \beta} \right)$$

Las ecuaciones canónicas de Hamilton en el desarrollo en ondas planas adoptan entonces la forma

$$\begin{aligned}\frac{dq_{\vec{k}_n}^\beta}{dx^0} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\vec{k}_n \beta}} = \{q_{\vec{k}_n}^\beta, H_c(\vec{x}, t)\} = \frac{1}{\varepsilon_0} p_{\vec{k}_n \beta} \\ \frac{dp_{\vec{k}_n \beta}}{dx^0} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{\vec{k}_n}^\beta} = \{p_{\vec{k}_n \beta}, H_c(\vec{x}, t)\} = -\varepsilon_0 \vec{k}_n^2 q_{\vec{k}_n}^\beta\end{aligned}$$

Ecuaciones canónicas para una partícula en un campo electromagnético

En el capítulo de teorías variacionales, definimos la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{mi} = \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_i$ de la materia junto y su interacción con el campo electromagnético como

$$\mathcal{L}_{mi}(\tau) = -\rho_{0m}c^2 - \frac{1}{c}J^\alpha \mathcal{A}_\alpha = -\rho_{0m}c^2 - \frac{1}{c}\rho_0 U^\alpha \mathcal{A}_\alpha$$

Puesto que esta lagrangiana es una función homogénea de grado 1 en U^α , el hamiltoniano asociado es nulo, ya que

$$\mathcal{H}_{mi} = \Pi_\alpha U^\alpha - \mathcal{L}_{mi} = U^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial U^\alpha} - \mathcal{L}_{mi} \equiv 0$$

Por ello, es necesario modificar la lagrangiana para poder obtener las ecuaciones de evolución mediante una hamiltoniana.

Existen varios métodos para obtener el hamiltoniano, todos ellos basados en los multiplicadores de Lagrange, empleando como condiciones auxiliares algunas constricciones relativistas de las variables dinámicas.

Uno método muy utilizado, es emplear la condición de invarianza de la norma del cuadvivector de velocidad

$$U^\alpha U_\alpha = c^2$$

Definimos ahora la lagrangiana de una partícula que interacciona con un campo electromagnético por

$$\mathcal{L}_{mi}(A^\alpha, x^\alpha, \tau) = \underbrace{\frac{\rho_{0m}}{2}(U^\alpha U_\alpha - c^2)}_{\text{partícula libre}} \quad \underbrace{- \frac{1}{c}\rho_0 A^\alpha U_\alpha}_{\text{interacción e.m.}}$$

En esta lagrangiana, ahora la masa en reposo actúa como un multiplicador de Lagrange de la condición auxiliar de ligadura $U^\alpha U_\alpha = c^2$.

Esta nueva lagrangiana, en el proceso variacional es equivalente a la anterior y nos lleva a las mismas ecuaciones de movimiento.

Ahora, el campo electromagnético, que viene representado por los potenciales A^α , actúa como sistema externo con el que interactúa las cargas, y las ecuaciones de movimiento de la materia vendrán por la variación respecto a las coordenadas $x^\alpha(\tau)$ que resultan en las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial U^\alpha} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial x^\alpha} = 0$$

Para una carga puntual, volvemos a obtener la misma ecuación de dinámica del movimiento que obtuvimos para la lagrangiana inicial.

$$m_0 c \frac{d\mathcal{U}^\alpha}{d\tau} = q \mathcal{F}^{\alpha\beta} \mathcal{U}_\beta$$

Al ser

$$\mathcal{U}^\beta F_{\alpha\beta} = \mathcal{U}^\beta (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \mathcal{U}^\beta \partial_\alpha A_\beta - \frac{dA_\alpha}{d\tau}$$

podemos reescribirla como

$$\frac{d\Pi_\alpha}{d\tau} = q \mathcal{U}^\beta \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}$$

siendo Π_α el momento canónico conjugado de una carga puntual

$$\Pi_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_{cm}}{\partial \mathcal{U}^\alpha} = m_0 \mathcal{U}_\alpha - \frac{q}{c} A_\alpha$$

donde ahora las x^α representan las coordenadas de posición de la partícula

$$\bar{x} = (\bar{x}^\alpha) = (ct(\tau), \bar{x}_r(\tau))$$

La hamiltoniana definida como es habitual, para una carga puntual tomará la expresión

$$\mathcal{H}_{mi}(\Pi_\alpha, x^\alpha) = \mathcal{U}^\alpha \Pi_\alpha - \mathcal{L}_{mi} = \frac{1}{2m_0} \left(\Pi_\alpha + \frac{1}{c} q A_\alpha \right) \left(\Pi^\alpha + \frac{1}{c} q A^\alpha \right) + \frac{m_0 c^2}{2}$$

Se verificará entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial x^\alpha} &= \Pi_\beta \frac{\partial \mathcal{U}^\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial \mathcal{U}^\beta} \frac{\partial \mathcal{U}^\beta}{\partial x^\alpha} = - \frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial x^\alpha} = \frac{d\Pi_\alpha}{d\tau} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial \Pi_\alpha} &= \mathcal{U}^\alpha + \Pi_\beta \frac{\partial \mathcal{U}^\beta}{\partial \Pi_\alpha} - \frac{\partial \mathcal{L}_{mi}}{\partial \Pi_\alpha} = \mathcal{U}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones canónicas de movimiento para la partícula serán

$$\begin{aligned} \frac{dx^\alpha}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial \Pi_\alpha} \\ \frac{d\Pi_\alpha}{d\tau} &= \frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial x^\alpha} \end{aligned}$$

Si Π_α es el momento a lo largo de la trayectoria real de la partícula, de la definición de Π_α deberá ser $\mathcal{H}_{mi} = m_0 c^2$, de acuerdo también con la conservación de la energía.

Los significados del campo electromagnético

Usando esta ecuación de la energía, podemos despejar Π_0 en función de las componentes espaciales obteniendo la relación

$$\Pi_0 = \Pi_0(\Pi_i, x^\alpha)$$

con lo que se garantiza que será

$$\mathcal{H}_{mi}(\Pi_0(\Pi_i, x^\alpha), \Pi_i) = m_0 c^2$$

Diferenciando la anterior ecuación respecto a x^α y Π_i tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial \Pi_0} \frac{\partial \Pi_0}{\partial x^\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial \Pi_i} + \frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial \Pi_0} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \Pi_i} &= 0 \end{aligned}$$

y considerando las ecuaciones canónicas para la evolución en el tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dx^0} &= \frac{\frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial \Pi_i}}{\frac{\partial \mathcal{H}_{mi}}{\partial \Pi_0}} = - \frac{\partial \Pi_0}{\partial \Pi_i} \\ \frac{d\Pi_i}{dx^0} &= - \frac{\partial \Pi_0}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Si se define a Π_0 como la hamiltoniana tridimensional

$$H_m \stackrel{\text{def}}{=} c \Pi_0(\Pi_i, x^\alpha)$$

se verificarán entonces las ecuaciones de Hamilton tridimensionales

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{dt} &= \frac{\partial H_m}{\partial \Pi_i} \\ \frac{d\Pi_i}{dt} &= - \frac{\partial H_m}{\partial x^i} \end{aligned}$$

De acuerdo con esta definición H_m se compota como la componente temporal de un cuadrivector. Las ecuaciones canónicas aunque son invariantes relativistas en su forma; sin embargo, no tienen una forma covariante.

La covarianza es una condición suficiente pero no es necesaria para la invarianza relativista.

De la definición de $\mathcal{H}_{mi}$ y H_m se obtiene

$$\left(-\frac{H_m}{c} + \frac{q}{c}\phi\right)^2 - (\vec{\Pi} - q\vec{A})^2 = (m_0 c)^2$$

que una vez resuelta nos da la hamiltoniana relativista de una carga puntual en un campo electromagnético

$$H_m = q\phi + c\sqrt{(m_0c)^2 + (\vec{\Pi} - q\vec{A})^2}$$

En el límite no relativista tenemos

$$H_m \approx q\phi + \frac{1}{2m_0}(\vec{\Pi} - q\vec{A})^2 + m_0c^2$$

que incorpora la energía de reposo de la masa.

Habitualmente a $\vec{\Pi}$ para una partícula puntual se le denomina también como $\vec{p}$.

El momento clásico se corresponde con

$$m_0\vec{v} = m_0(\vec{p} - q\vec{A})$$

Vemos que $q\vec{A}$ está asociado con el momento del campo electromagnético.

Que el momento que aparece en el hamiltoniano de una carga en un campo eléctrico debe ser reemplazado por

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$$

se conoce como el principio minimal. Hemos visto que se deduce directamente de las relaciones de conmutación y de los corchetes dinámicos de Poisson, pero como veremos, está también relacionado con las invarianzas ante una transformación gauge. Sin embargo, todavía existe un debate de si este principio minimal tiene un carácter más fundamental y general.

Otro método de modificar la lagrangiana para una partícula relativista es utilizar la relación de acoplamiento mínimo como condición auxiliar para el multiplicador de Lagrange,

$$\left(\Pi_\alpha + \frac{1}{c}qA_\alpha\right)\left(\Pi^\alpha + \frac{1}{c}qA^\alpha\right) = (m_0c)^2$$

lo que nos llevaría a las mismas ecuaciones que las obtenidas anteriormente.

Los corchetes de Poisson aplicados a las coordenadas de posición con Hamiltoniano nos reproduciría otra vez las ecuaciones dinámicas correspondientes a la fuerza de Lorentz.

Ecuaciones canónicas de Hamilton y de Lagrange para sistemas de partículas discretas

Consideremos ahora una lagrangiana de un sistema discreto, como el de una partícula en un campo electromagnético externo

$$L = L(x^k, \dot{x}_t^k, t)$$

Como el sistema de coordenadas cartesianas, es una de las muchas representaciones posibles para un sistema físico, en adelante supondremos que la lagrangiana es una función general $L(q^k, \dot{q}_t^k, t)$, de unas coordenadas generalizadas $q^k(t)$, y de sus derivadas respecto al tiempo $dq^k/dt \equiv \dot{q}_t^k(t)$

Sea C una curva entre dos puntos fijos (q_1^k) y (q_2^k) que pasa por los instantes t_1 y t_2 ; definimos la acción como la integral en el tiempo a lo largo de dicha curva de la lagrangiana

$$S(C) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^k(t), \dot{q}_t^k(t), t) dt$$

Supongamos ahora que a la curva C en cada instante t se le suma una pequeña perturbación $\varepsilon \eta^i(t)$ que se anula en los tiempos extremos de la curva, siendo ε un parámetro infinitesimal

$$\eta^i(q^k, t_1) = \eta^i(q^k, t_2) = 0$$

La acción perturbada

$$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(q^k + \varepsilon \eta^k, \dot{q}_t^k + \varepsilon \dot{\eta}_t^k, t) dt$$

será extremal cuando se verifique

$$\delta S(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} \eta^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_t^k} \dot{\eta}_t^k \right) dt \equiv 0$$

Integrando por partes el segundo término de la integral, y recordando que η^i se anula en la frontera, se llega a las ecuaciones de Euler-Lagrange que determinan la curva C que hacen estacionaria a la acción

$$E_k = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_t^k} = 0$$

La acción y la lagrangiana gozan de una serie de propiedades que conviene destacar, y que serán utilizadas en otros capítulos.

Una de ellas es que como la acción $S(C)$ debe ser invariante ante una transformación de coordenadas, la lagrangiana de tener la siguiente propiedad de invarianza ante la misma transformación de coordenadas

$$L(q^k(t), \dot{q}^k(t), t) = L(q^k, \dot{q}^k, t)$$

siendo la transformación

$$q^k = q^k(q^k)$$

De las identidades

$$dq^k_t = \frac{\partial q^k}{\partial q^k} dq^k_t \quad \text{y} \quad \frac{\partial q^k_t}{\partial q^k} = \frac{\partial q^k}{\partial q^k}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q^k_t} &= \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial q^k_t} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial q^k} \\ \frac{\partial L}{\partial q^k} &= \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial q^k} + \frac{\partial L}{\partial q^k_t} \frac{\partial q^k}{\partial q^k} = \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial q^k} + \frac{\partial L}{\partial q^k} \frac{\partial^2 q^k}{\partial q^k \partial q^k} x^n \end{aligned}$$

siendo $q^k_t = dq^k/dt$.

El vector de Euler

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q^k_t}$$

se transforma entonces como

$$E_i = \frac{\partial q^k}{\partial q^i} E_k$$

Es decir, (E_k) se transforma como un vector covariante, como por ejemplo el gradiente (∂_i) . Observemos que (q^k_t) se transforma de forma inversa por ser un vector contravariante.

A las trayectorias que anulan el vector de Euler $(E_i) = 0$ se le denomina campo de extremales.

Puesto que (E_i) se transforma como un vector covariante y se anula en la curva que hace extremal la acción, entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange conservan invariante su forma en una transformación de coordenadas, lo que se denomina invarianza canónica

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0$$

Además, la lagrangiana debe ser una ecuación homogénea de grado 1 en $\dot{q}^k$, ya que si se hace la transformación $\tau = \tau(t)$ la integral de la acción debe ser invariante y por tanto debe verificarse

$$L\left(q^k, \frac{\dot{q}^k}{\tau}, \tau\right) \tau_{,t} = L(q^k, \dot{q}^k, t)$$

Por esta condición de homogeneidad se debe verificar la relación

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k \equiv L \Rightarrow E_k \cdot \dot{q}^k \equiv 0$$

Por tanto el vector de Euler (E_k) es normal a la tangente a la curva $\mathcal{C}$ que pasa por un punto determinado del espacio de las coordenadas generalizadas.

Se define los momentos canónicos como

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q^i, \dot{q}^i, t)$$

Muchas veces los momentos canónicos se representan por π_k .

Si la lagrangiana es no singular

$$\det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \right| \neq 0$$

entonces, se puede invertir la ecuación y expresar $\dot{q}^i_t$ en función de los momentos canónicos

$$\dot{q}^i_t = \varphi^i(q^k, p_k, t)$$

La función de Hamilton se define como

$$H(q^k, p_k, t) = p_i \varphi^i(q^k, p_k, t) - L(q^k, \varphi^k(q^j, p_j, t), t)$$

Verificándose las siguientes identidades

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_k} &= \varphi^k + p_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial p_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial p_k} = \varphi^k = \dot{q}^k_t \\ \frac{\partial H}{\partial q^k} &= p_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial q^k} = - \frac{\partial L}{\partial q^k} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Sobre la curva extremal es $(E_k) = 0$ se verifica que

$$p_{k,t} + \frac{\partial H}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_{,t}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0$$

y entonces

$$\frac{\partial H}{\partial q^k} + p_{k,t} = 0$$

lo que nos da la ecuación dinámica de cómo evolucionan los momentos con el tiempo sobre la curva extremal, que en un problema físico corresponde a la trayectoria real.

La otra ecuación $q_t^k = \partial H / \partial p_k$, es simplemente una consecuencia de la definición de los momentos canónicos, y no es simplemente una ecuación dinámica. Las ecuaciones de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dq^k}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \frac{dp_k}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q^k} \end{aligned}$$

nos determinan cómo evolucionan las coordenadas y momentos generalizados en una curva extremal de la acción, por lo que sustituye el problema de resolver las ecuaciones de Euler-Lagrange que son de segundo grado por las de Hamilton de primer grado.

Además hay otras dos relaciones obtenidas

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^k} &= -\frac{\partial L}{\partial q^k} \\ \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

que nos indican, que si la lagrangiana L no depende del tiempo, entonces el hamiltoniano H tampoco dependerá del tiempo, por lo que será una magnitud que se conserva en el tiempo, y que en muchos sistemas estará asociada con la energía

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} \equiv 0$$

También estas relaciones nos indican, que si la lagrangiana L no depende de una coordenada q^k (llamadas en este caso coordenadas cíclicas), tampoco el hamiltoniano

dependerá de ella, dando lugar a que el momento conjugado p^k no varíe con el tiempo.

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = -\frac{\partial H}{\partial q^k} = 0 \Rightarrow \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \equiv 0$$

Que L o H no dependan de una coordenada, indica que el sistema también es invariante ante una transformación $q^k \rightarrow q'^k = q^k + \Delta q^k$, por lo volvemos a ver que las simetrías de L o H están también asociadas a unas magnitudes a unas magnitudes que se conservan en el tiempo.

Estas simetrías pueden verse también de otra forma. Si $\delta' L(q^k, q_t^k)$ es la variación de la lagrangiana sobre las trayectorias extremales, pero permitiendo ahora que las condiciones de frontera puedan variar

$$\delta' L = \frac{\partial L}{\partial q_t^k} \delta q^k + \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q_t^k = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_t^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) \delta q^k + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_t^k} q^k \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_t^k} \delta q^k \right)$$

En vez de t podríamos utilizar cualquier otro parámetro de integración cualquiera, siempre que normalizáramos la lagrangiana para que la integral de la acción sea invariante.

La variación de la acción vendrá dada por

$$\delta' S = \delta' \int_{t_1}^{t_2} L(q^k, q_t^k) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta' L dt + L(\delta t_2 - \delta t_1) = |p_k \delta q^k + L \delta t|_{t_1}^{t_2}$$

La anterior ecuación nos indica que si el sistema es invariante ante una transformación δq^k , entonces es $\delta' S = 0$ y la siguiente magnitud G es una constante en el tiempo, siendo

$$G = p_k \delta q^k + L \delta t$$

A G se le denomina generador de la transformación invariante.

Si el sistema es invariante ante una transformación de translación de la coordenada $\delta q^k = \delta a^k$ entonces el momento canónico p_k será una constante de movimiento.

Mayor interés tiene las magnitudes conservadas de las invarianzas ante las transformaciones del tipo $\delta q^k = \varepsilon_l^k q^l$ debidas a rotaciones espaciales o de Lorentz, que serán analizadas con detalle en el capítulo de teorías de los invariantes.

Campos geodésicos. Ecuaciones de Hamilton-Jacobi

Sea C una curva $q^k = q^k_c(t)$ que pasa por dos puntos P_1 y P_2 en los instantes t_1 y t_2 , y un conjunto de superficies $S = S(q^k, t)$ dependientes de t como parámetro, que sobre la curva tomarán el valor $S = S(q^k_c(t), t)$ y variaran en función de t como

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x^k} \frac{dq^k}{dt} = S_{,t} + S_{,k} q^k_{,t}$$

Definimos

$$L^*(q^k, q^k_{,t}, t) = L(q^k, q^k_{,t}, t) - S_{,t} + S_{,k} q^k_{,t} \quad q^k = q^k_c(t)$$

Si calculamos la integral de camino de $L^*(C)$ entre dos puntos de la P_1 y P_2 de la curva obtenemos

$$I^*(C) = \int_{P_1, t_1}^{P_2, t_2} L^*(q^k, q^k_{,t}, t) dt = I(C) + S(P_1) - S(P_2)$$

Es decir, las integrales $I^*(C)$ y $I(C)$ son equivalentes e independientes de la curva que une los puntos P_1 y P_2

$$I^*(C) - I(C) = S(P_1) - S(P_2)$$

287

Además, las curvas extremales de $I^*(C)$ serán las mismas que las de $I(C)$, por lo que según el cálculo de variaciones, son integrales equivalentes.

Este resultado, también es equivalente a decir, que entre dos superficies en que S toma valores constantes $S(q^k, t) = c_1$ y $S(q^k, t) = c_2$, la integral de la acción $I(C)$ es independiente de la curva extremal que une dos puntos entre ellas., y depende solo de los valores de la acción en dichos puntos.

Se dice que existe un campo geodésico $\psi^k(q^k, t) = q^k_{,t}$ si

$$L(q^k, q^k_{,t}) \equiv 0 \quad y \quad \frac{\partial L^*}{\partial q^k_{,t}} \equiv 0 \quad \text{para} \quad q^k_{,t} = \psi^k(q^k, t)$$

El campo geodésico puede considerarse como un sistema ecuaciones diferenciales, que definen un conjunto de curvas $\mathcal{F}$. Sea $q^k_{\mathcal{F}}(t)$ un miembro de esta familia de curvas que pasa por los puntos P_1 y P_2 en los instantes t_1 y t_2 . Sobre dicha curva del campo geodésico se verifica

$$0 \equiv \frac{\partial L^*}{\partial q^k_{,t}} = \frac{\partial L}{\partial q^k_{,t}} - \frac{\partial S}{\partial q^k} = p_k - S_{,k}$$

y por tanto

$$p_k = S_{,k}(q^i, t)$$

Sustituyendo la anterior expresión en la ecuación de definición de momento canónico

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial q_t^k}(q^i, q_t^i, t) \rightarrow q_t^i = \varphi^i(q^k, p_k, t)$$

obtenemos las ecuaciones del campo geodésico

$$q_t^i = \varphi^i(q^k, p_k, t) = \varphi^i(q^k, S_{,k}(q^i, t), t) \equiv \psi^i(q^k, t)$$

Puesto que el campo geodésico hace $L^* = 0$, tenemos

$$0 = L^* = L(q^k, q_t^k, t) - S_{,t} + S_{,k}q_t^k = L(q^k, q_t^k, t) - S_{,t} - p_k q_t^k = H + S_{,t}$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q^k, \frac{\partial S(q^i, t)}{\partial q^k}, t\right) = 0$$

cuyas soluciones $S(q^k, t)$ son la acción y determinan el campo geodésico cuando son introducidas en las anteriores expresiones.

La solución general de la ecuación de Hamilton-Jacobi determina totalmente la evolución de la dinámica del sistema y es equivalente a las ecuaciones canónicas de Hamilton. Si $S(q^k, t)$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, entonces

$$p_k = S_{,k}(q^i, t) \Rightarrow p_{k,t} = S_{,tk} + S_{,kl}q_t^l$$

Se puede obtener $S_{,tk}$ derivando la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$S_{,tk} + H_{,k} + \frac{\partial H}{\partial p_l} S_{,lk} = 0$$

con lo que obtenemos otra vez las conocidas ecuaciones canónicas de Hamilton para la evolución del momento

$$p_{k,t} = -H_{,k} \quad \text{o} \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^k}$$

Las superficies $S(q^k, t)$ pueden también identificarse con las integrales de la acción para el campo de extremales. El campo de las curvas extremales cortan ortogonalmente a las superficies en que la acción es constante. Es importante observar que (p_k) es normal a las superficies de acción constante $S = Cte$, y por tanto, es tangente al campo de las curvas extremales (trayectorias físicas reales) que atraviesan a dichas superficies

$$p_k = \vec{\nabla}_k S$$

La ecuación de Hamilton-Jacobi es equivalente a las ecuaciones de Euler-Lagrange, ya que dan las mismas soluciones para la evolución dinámica. Sin embargo, Lovelock afirma que las ecuaciones de Hamilton-Jacobi tienen un carácter más fundamental para las leyes de la naturaleza, que las de Euler-Lagrange con sus integrales de acción extremales. El paso de la mecánica clásica a la mecánica cuántica se dio de forma natural desde la ecuación de Hamilton-Jacobi, por lo menos en su interpretación ondulatoria, y fue el método preferido por Landau para la resolución de los problemas físicos.

La solución general de la ecuación de Hamilton-Jacobi dependerá de N constantes α_k , donde N es número de coordenadas generalizadas q^k ,

$$S = S(q^k, t, \alpha_k)$$

Haciendo

$$\beta_i = \frac{\partial S(q^k, t, \alpha_k)}{\partial \alpha_i}$$

y despejando las q^k , se obtiene la solución general $q^k = q^k(\alpha_k, \beta_k, t)$.

Las $2N$ constantes α_k, β_k se pueden determinar de la condiciones iniciales para un instante determinado de q^k, p_k

Que las β_k son constantes se comprueba a partir de la igualdad

$$\frac{d\beta_k}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial q^l} \frac{dq^l}{dt} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial q^l} \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \left(H + \frac{\partial S}{\partial t} \right) = 0$$

Consideremos ahora un sistema estacionario en que la lagrangiana y el hamiltoniano no dependen explícitamente del tiempo. Entonces poniendo $S \rightarrow S^* - Et$, la ecuación de Hamilton-Jacobi se reduce a

$$H \left(q^i, \frac{\partial S^*(q^i)}{\partial q^k} \right) = E$$

y la general solución dependerá de N constantes

$$S^* = S^*(q^i, \alpha_i)$$

donde ahora podemos tomar $\alpha_N = E$. Si hacemos al igual que antes

$$\beta_k = \frac{\partial S(q^i, \alpha_i)}{\partial \alpha_k}$$

siendo $\beta_N = -t$, obtenemos despejando las q^i , la solución general

$$q^i = q^i(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, E, \beta_1, \dots, \beta_{N-1}, t)$$

Ondas materiales

Las superficies de S constante se pueden considerar con frentes de ondas que se propagan en el espacio de configuración de las coordenadas generalizadas.

En un sistema estacionario, si consideramos un punto q_0^k en la superficie $S(q_0^k, t_0, \alpha_k) = S_0$ en el instante t_0 , entonces en el instante $t_0 + \Delta t$ el punto se desplazará una distancia Δs en espacio de configuración de las coordenadas q^k de acuerdo con la ecuación

$$0 = \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial S}{\partial q^k} \frac{dq^k}{dt} \Delta t = -E + \frac{\partial S}{\partial q^k} dq^k = -E \Delta t + |\vec{\nabla}_k S| \Delta s$$

$$\Delta s = \frac{E \Delta t}{|\vec{\nabla}_k S|} = \frac{E \Delta t}{|p_k|}$$

Para una partícula en el espacio de tres dimensiones la velocidad de propagación de un punto del frente de ondas será $v_f = \Delta s / \Delta t$. Para una partícula no relativista la ecuación de Hamilton-Jacobi será

$$(\vec{\nabla}_k S)^2 = E - V$$

290

y por tanto

$$|p_k| = |\vec{p}| = \sqrt{2m(E - V)}$$

con lo que será

$$v_f = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|p|} = \frac{E}{\sqrt{2m_0(E - V)}} = \frac{E}{\sqrt{2m_0 E_c}} = \frac{E}{m_0 v}$$

donde v es la velocidad de la partícula.

En un medio con índice de refracción n , sabemos que las componentes del potencial vector con el gauge de Coulomb, verifican la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2(\vec{x})}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A = 0$$

Si suponemos que A es una onda de la forma

$$A = A_0 e^{i(kS_0(\vec{x}) - \omega t)}$$

se verificarán entonces las ecuaciones

$$\nabla^2 A_0 + \left(n^2(\vec{x}) - (\vec{\nabla} S_0)^2 \right) k^2 A_0 = 0$$

$$2\vec{\nabla}S_0 \cdot \vec{\nabla}A_0 + \nabla^2 S_0 A_0 = 0$$

Se define la longitud λ de onda como

$$\frac{2\pi}{\lambda} = k = \frac{\omega}{c}$$

Si el índice de refracción varía poco en distancias comparables con la longitud de ondas

$$\frac{dn}{dx} \lambda \ll 1$$

entonces S_0 verificará la ecuación de la eikonal

$$(\vec{\nabla}S_0)^2 = n^2(\vec{x})$$

Es necesaria remarcar que la velocidad de fase de los frentes de onda de fase constante de A vendrá dada por

$$kdS_0(\vec{x}) - \omega dt = k|\vec{\nabla}S_0|ds - \omega dt = 0$$

y por tanto

$$v_f \frac{ds}{dt} = \frac{\omega}{k|\vec{\nabla}S_0|} = \frac{c}{n}$$

como era de esperar. Las velocidades de fase v_f de los frentes de onda de la mecánica y la óptica están en una relación invertida con respecto a la velocidad propagación de la luz y la velocidad de la partícula

$$v_f = \frac{c}{n} \leftrightarrow v_f = \frac{E}{m_0 v}$$

óptica mecánica

Se comentar que mientras las superficies ópticas S_0 se propagan con el tiempo real en el espacio de coordenadas, la propagación de las superficies S no corresponde con el movimiento en tiempo real de una partícula, y la analogía es solo respecto a la forma y las trayectorias

Todo esto sugirió a de Broglie la idea de asociar a una partícula una onda de materia con números ondas y frecuencia $\hbar\vec{k} = \vec{p}$ y $\hbar\omega = E$

Si en la ecuación mecánica ponemos $E = \hbar\omega$ y $v_f = \omega\lambda/2\pi$, obtenemos la célebre ecuación de de Broglie, que asocia una longitud de onda λ con el momento de una partícula no relativista $m_0 v$ a través de la constante de Planck h

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v}$$

Si a la partícula se le asocia también una función ψ que verifique la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v_f^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0$$

Si ponemos

$$\psi = \psi_0(\vec{x}) e^{-i\omega t} \quad y \quad v_f = \frac{E}{\sqrt{2m_0(E-V)}} = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2m_0(E-V)}}$$

Obtenemos la célebre ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica de una partícula no relativista

$$\left(\nabla^2 + \frac{2m_0}{\hbar^2} (E - V) \right) \psi_0(\vec{x}) = 0$$

Que se mantenga relación

$$\frac{E}{|\vec{p}|} = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$$

es debido a que $(E, c\vec{p})$ y $(\omega, c\vec{k})$ son cuadvectores en un espacio de Minkowski, y por tanto, se mantiene invariante ante las transformaciones de Poincaré la relación

$$E^2 - c^2 \vec{p}^2 = \hbar^2 (\omega^2 - c^2 \vec{k}^2)$$

que es equivalente a la anterior expresión en el límite no relativista. Porqué la constante de proporcionalidad es la constante de Planck $\hbar$, es uno de los secretos guardados todavía por la naturaleza.

Si consideramos una partícula relativista en un campo potencial escalar V , entonces se verificará

$$E = mc^2 + V = cp^0 + V$$

y el cuadvector de energía momento es $(cp^0, c\vec{p})$, por lo que se verificará la ecuación de energía

$$(E - V)^2 - c^2 \vec{p}^2 = m_0^2 c^4$$

Para $V = 0$, obtenemos la siguiente relación dispersiva de la onda que se ha comprobado experimentalmente para electrones libres con altas velocidades

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = \vec{k}^2 + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}$$

Esta ecuación también se puede interpretar como las componentes de la transformada Fourier de la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi_0(\vec{x}, t) = 0$$

que es la ecuación de Klein-Gordon de la mecánica cuántica relativista para partículas con masa sin espín.

Representación del campo electromagnético en ondas planas

Hemos visto que los potenciales del campo electromagnético verifican las ecuaciones

$$\partial x^\mu \partial x_\mu \mathcal{A}^\beta = \frac{j^\beta}{c \epsilon_0}$$

con la condición adicional del gauge de Lorentz

$$\partial x_\alpha \mathcal{A}^\alpha = 0$$

Hemos visto que la densidad hamiltoniana del campo electromagnético libre en el vacío viene dada por

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2\epsilon_0} \vec{\Pi}_A^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2$$

que no depende explícitamente del potencial escalar ϕ . Por ello en los tratamientos hamiltonianos, en el vacío donde no hay fuentes, es conveniente tomar el gauge de Coulomb $\text{div } \vec{A} = 0$ en que se anula el potencial escalar, y trabajar solo con el potencial vector

$$\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \rightarrow \phi = A^0 \equiv 0$$

Además ya hemos visto que el vacío sin fuentes se verifica

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_A = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Por tanto si $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ es nulo en algún instante de tiempo, lo será también para todos los tiempos.

Con el gauge de Coulomb, el potencial vector es un campo transversal puro $\vec{A} \equiv \vec{A}_T$ y $\vec{A}_L \equiv 0$. Entonces, el campo eléctrico será también un campo transversal

$$\vec{E}_T = -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} \quad y \quad \vec{E}_L = 0$$

Puesto que $\vec{A}$ verifica la ecuación d'alambertiana

$$0 = \partial x^\mu \partial x_\mu \vec{A}_T = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A}_T = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_T}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}_T = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_T}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}_T$$

Por tanto el campo eléctrico y el potencial adoptan una forma similar a las ecuaciones canónicas

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= -\frac{\partial \vec{A}_T}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{E}_T}{\partial t} &= -c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{A}_T \\ \vec{A}_L &= \vec{A}_L = 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son gauge invariantes. Además son también invariantes relativistas de Poincaré aunque no tienen una forma covariante.

Para la densidad hamiltoniana del campo electromagnético

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2\epsilon_0} \vec{\Pi}_A^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A})^2$$

hemos visto que las ecuaciones canónicas de movimiento son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\Pi}_A \\ \frac{\partial \vec{\Pi}_A}{\partial t} &= -c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{aligned}$$

y también que

$$\vec{\Pi}_A = -\epsilon_0 \vec{E}$$

Derivando las anteriores ecuaciones respecto al tiempo se obtiene las ecuaciones de ondas

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = c^2 \nabla^2 \vec{A}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\Pi}_A}{\partial t^2} = -c^2 \epsilon_0 \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = c^2 \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{\Pi} = c^2 \nabla^2 \vec{\Pi}$$

que se corresponden con las ecuaciones de osciladores armónicos de las componentes del desarrollo Fourier.

En adelante eliminaremos el subíndice de $\vec{\Pi}_A$, y utilizaremos la notación simplificada para designarlo como $\vec{\Pi}$.

Hagamos un desarrollo en serie de Fourier en ondas planas del potencial vector

$$A^i(x^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, \sigma} \left(a_{\vec{k}, \sigma}(x^0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}, \sigma}^*(x^0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

Siendo $\vec{k}_n = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3)$ donde ahora los n_i son números enteros positivos. Por n representamos al conjunto $n = (n_1, n_2, n_3)$ de números positivos y $V = L^3$. Evidentemente se verifica

$$\frac{1}{V} \int_{V_\infty} e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_n') \cdot \vec{x}} d\vec{x} = \delta_{n, n'}$$

En adelante omitiremos el subíndice n y representaremos $\vec{k}_n$ simplemente por $\vec{k}$, entendiéndose que la suma se hace sobre todos los valores posibles $\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_1, n_2, n_3)$

$$A^i(x^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}, \sigma}(x^0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}, \sigma}^*(x^0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\Pi_A^i(x^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(p_{\vec{k}, \sigma}(x^0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + p_{\vec{k}, \sigma}^*(x^0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

La condición de que se anule la divergencia será equivalente a

$$0 = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} i\vec{k} \left(a_{\vec{k}, \sigma}(x^0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - a_{\vec{k}, \sigma}^*(x^0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

Es decir, las componentes Fourier de las ondas planas son transversales a la dirección $\vec{k}$ de propagación

$$\vec{k} \cdot \vec{a}_{\vec{k}, \sigma} = 0$$

Tomando como base dos direcciones ortogonales en el plano perpendicular de propagación, haremos

$$\vec{a}_{\vec{k}, \sigma} = a_{\vec{k}, \sigma} \vec{e}_{\vec{k}, \sigma}$$

Donde $\vec{e}_{\vec{k}, 1}$ y $\vec{e}_{\vec{k}, 2}$ representan dos vectores unitarios perpendiculares entre sí y ortogonales a la dirección de propagación de la onda plana $\vec{k}$, que verifican

$\vec{k} \cdot \vec{e}_{\vec{k},\sigma} = 0$. Por σ se representa las dos direcciones de polarización transversales posibles de las componentes Fourier del potencial vector.

Puesto que $\vec{e}_{\vec{k},1}$, $\vec{e}_{\vec{k},2}$ y $\vec{k}/|\vec{k}|$ forman un triedro de vectores unitarios será

$$\sum_{\sigma} e_{\vec{k},\sigma}^i e_{\vec{k},\sigma}^j = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}$$

Por tanto, el potencial vector vendrá representado por

$$\vec{A}(x^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma}(x^0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \vec{e}_{\vec{k},\sigma}^* a_{\vec{k},\sigma}^*(x^0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

$$\vec{\Pi}_{\vec{A}}(x^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} p_{\vec{k},\sigma}(x^0) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \vec{e}_{\vec{k},\sigma}^* p_{\vec{k},\sigma}^*(x^0) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right)$$

Las componentes $a_{\vec{k}}(x^0)$ se calculan a partir de la ecuación de ondas que debe verificar el potencial vector. En el vacío sin fuentes, tenemos

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = 0$$

por lo que las componentes $\vec{a}_{\vec{k}}$ verifican la ecuación del oscilador armónico

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{a}_{\vec{k},\sigma}}{dt^2} + \vec{k}^2 \vec{a}_{\vec{k},\sigma} = 0$$

Puesto que $\vec{\Pi}_{\vec{A}} = \varepsilon_0 \partial_t \vec{A}$, vemos que $\vec{\Pi}_{\vec{A}}$ también verifica la ecuación de ondas

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 p_{\vec{k},\sigma}}{dt^2} + \vec{k}^2 p_{\vec{k},\sigma} = 0$$

y además

$$p_{\vec{k},\sigma}(x^0) = \varepsilon_0 c \frac{d \vec{a}_{\vec{k},\sigma}}{dx^0}$$

Estas ecuaciones tienen la solución general armónica

$$a_{\vec{k},\sigma}(x^0) = a_{\vec{k},\sigma} e^{-i \frac{\omega_{\vec{k}}}{c} x^0} + a_{\vec{k},\sigma}^* e^{i \frac{\omega_{\vec{k}}}{c} x^0}$$

$$p_{\vec{k},\sigma}(x^0) = -i \varepsilon_0 \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k},\sigma} e^{-i \frac{\omega_{\vec{k}}}{c} x^0} + i \varepsilon_0 \omega_{\vec{k}} a_{\vec{k},\sigma}^* e^{i \frac{\omega_{\vec{k}}}{c} x^0}$$

siendo

$$\left(\frac{\omega_{\vec{k}}}{c} \right)^2 = \vec{k}^2$$

Ya hemos visto antes que las componentes Fourier verifican las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\frac{da_{\vec{k},\sigma}}{dx^0} &= \frac{\partial H}{\partial p_{\vec{k},\sigma}} = \{a_{\vec{k},\sigma}, H_c(\vec{x}, t)\} = \frac{1}{\varepsilon_0} p_{\vec{k},\sigma} \\ \frac{dp_{\vec{k},\sigma}}{dx^0} &= -\frac{\partial H}{\partial a_{\vec{k},\sigma}} = \{p_{\vec{k},\sigma}, H_c(\vec{x}, t)\} = -\varepsilon_0 k^2 a_{\vec{k},\sigma}\end{aligned}$$

lo que nos lleva también a las mismas ecuaciones armónicas, teniendo en cuenta que los corchetes fundamentales de Poisson adoptan la expresión

$$\begin{aligned}\{a_{\vec{k},\sigma}(t), a_{\vec{k}',\sigma'}(t)\} &= \{p_{\vec{k},\sigma}(t), p_{\vec{k}',\sigma'}(t)\} = 0 \\ \{a_{\vec{k},\sigma}(t), p_{\vec{k}',\sigma'}^*(t)\} &= \{a_{\vec{k},\sigma}^*(t), p_{\vec{k}',\sigma'}(t)\} = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}\end{aligned}$$

Invertiendo las ecuaciones armónicas obtenemos

$$\begin{aligned}a_{\vec{k},\sigma}(t) &= \frac{1}{2} \left(a_{\vec{k},\sigma} + \frac{i}{\varepsilon_0 |\vec{k}|} p_{\vec{k},\sigma} \right) e^{i\frac{\omega_{\vec{k}}}{c} x^0} \\ a_{\vec{k},\sigma}^*(t) &= \frac{1}{2} \left(a_{\vec{k},\sigma} - \frac{i}{\varepsilon_0 |\vec{k}|} p_{\vec{k},\sigma} \right) e^{-i\frac{\omega_{\vec{k}}}{c} x^0}\end{aligned}$$

Las nuevas componentes $a_{\vec{k},\sigma}$ verifican los corchetes de Poisson

$$\{a_{\vec{k},\sigma}(t), a_{\vec{k}',\sigma'}^*(t)\} = \{a_{\vec{k},\sigma}^*(t), a_{\vec{k}',\sigma'}(t)\} = -\frac{i}{2\varepsilon_0 |\vec{k}|} \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$$

Si definimos el cuadrivector $\bar{k} \stackrel{\text{def}}{=} k^\alpha = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$, la fase del desarrollo Fourier será entonces

$$\bar{k} \cdot \bar{x} = k^\alpha x_\alpha = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

y el potencial vector en el vacío sin fuentes, se describirá como

$$\begin{aligned}\vec{A}(x^\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} e^{i(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t)} + \vec{e}_{\vec{k},\sigma}^* a_{\vec{k},\sigma}^* e^{-i(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t)} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} e^{-i\bar{k} \cdot \bar{x}} + \vec{e}_{\vec{k},\sigma}^* a_{\vec{k},\sigma}^* e^{i\bar{k} \cdot \bar{x}} \right)\end{aligned}$$

De la anterior ecuación, se desprende que el potencial vector en el vacío donde no hay fuentes, se puede considerar análogo a un sistema de osciladores armónicos, con oscilación transversal a la dirección de propagación de las ondas planas parciales.

Por tanto, el campo electromagnético se puede asimilar a un sistema de osciladores con un número infinito de grados de libertad. El campo electromagnético está definido por el estado de las amplitudes de los osciladores $a_{\vec{k},\sigma}$, que se pueden considerar como las coordenadas del campo, cuyas ecuaciones de movimiento vienen determinadas por una hamiltoniana que coincide con la energía y que se denomina función de Hamilton del campo.

El momento canónico del campo electromagnético en este caso vendrá dado por

$$\vec{\Pi}_{\vec{A}} = -\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} i\omega \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} - \vec{e}_{-\vec{k},\sigma}^* a_{-\vec{k},\sigma}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right)$$

El campo eléctrico y de inducción magnética en ondas planas será entonces

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\vec{\Pi}_{\vec{A}}}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} i\omega \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} - \vec{e}_{-\vec{k},\sigma}^* a_{-\vec{k},\sigma}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right) \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} i\vec{k} \wedge \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} - \vec{e}_{-\vec{k},\sigma}^* a_{-\vec{k},\sigma}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \right) \end{aligned}$$

Corchetes de Poisson para el campo electromagnético

A partir de la representación de ondas planas, se obtienen fácilmente los corchetes de Poisson del potencial vector y su momento conjugado para el gauge de Coulomb

$$\begin{aligned} \{A^i(\vec{x}_1, t), A^j(\vec{x}_2, t)\} &= 0 \quad \{\Pi_{\vec{A}}^k(\vec{x}_1, t), \Pi_{\vec{A}}^l(\vec{x}_2, t)\} = 0 \\ \{A^i(\vec{x}_1, t), \Pi_{\vec{A}}^j(\vec{x}_2, t)\} &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k},\sigma} \varepsilon_{\vec{k},\sigma}^i \varepsilon_{\vec{k},\sigma}^j e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} = \\ &= \frac{\delta^{ij}}{V} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)} - \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2)}}{k^2} = \delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \end{aligned}$$

Esta última relación también expresa la relación de conmutación con el campo eléctrico

$$\{A^i(\vec{x}_1, t), E^j(\vec{x}_2, t)\} = -\{A^i(\vec{x}_1, t), \partial_t A^j(\vec{x}_2, t)\} = -\frac{\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{\varepsilon_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

Es de interés obtener también los corchetes de Poisson para diferentes instantes de tiempo.

Es de interés obtener los corchetes de Poisson y las relaciones de conmutación también a diferentes tiempos

$$\begin{aligned}\{E^i(\vec{x}_1, t_1), E^j(\vec{x}_2, t_2)\} &= \frac{c}{V\epsilon_0} \sum_{\vec{k}, \sigma} e_{\vec{k}, \sigma}^i e_{\vec{k}, \sigma}^j |\vec{k}| \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - c|\vec{k}|(t_1 - t_2)) \\ &= \frac{c|\vec{k}|}{V\epsilon_0} \sum_{\vec{k}} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2} \right) |\vec{k}| \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - c|\vec{k}|(t_1 - t_2)) \\ &= \frac{c}{V\epsilon_0} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{|\vec{k}|} \left(\frac{\delta^{ij}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right) \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - c|\vec{k}|(t_1 - t_2))\end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned}D(\vec{x}, t) &= \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{|\vec{k}|} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - c|\vec{k}|t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R_\infty} \frac{1}{|\vec{k}|} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - c|\vec{k}|t) d^3k \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2 |\vec{x}|} \int_0^\infty \left(\cos(|\vec{k}|(|\vec{x}| - ct)) - \cos(|\vec{k}|(|\vec{x}| + ct)) \right) d^3k \\ &= \frac{1}{4\pi |\vec{x}|} (\delta(|\vec{x}| - ct) - \delta(|\vec{x}| + ct))\end{aligned}$$

y por tanto

$$\{E^i(\vec{x}_1, t_1), E^j(\vec{x}_2, t_2)\} = \frac{c}{\epsilon_0} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\delta^{ij}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right) D(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2)$$

De igual forma se obtiene

$$\begin{aligned}\{B^i(\vec{x}_1, t_1), B^j(\vec{x}_2, t_2)\} &= \frac{1}{c^2} \{E^i(\vec{x}_1, t_1), E^j(\vec{x}_2, t_2)\} \\ \{B^i(\vec{x}_1, t_1), B^j(\vec{x}_2, t_2)\} &= \frac{1}{c\epsilon_0} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\delta^{ij}}{c^2} \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_2^j} \right) D(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2)\end{aligned}$$

Los corchetes de Poisson de las componentes cruzadas del campo electromagnético vienen dadas por

$$\begin{aligned}\{E^i(\vec{x}_1, t_1), B^j(\vec{x}_2, t_2)\} &= \\ &= \frac{1}{V\epsilon_0} \sum_{\vec{k}, \sigma} \left(e_{\vec{k}, 1}^i e_{\vec{k}, 2}^j - e_{\vec{k}, 1}^j e_{\vec{k}, 2}^i \right) |\vec{k}| \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - c|\vec{k}|(t_1 - t_2))\end{aligned}$$

Puesto que

$$e_{\vec{k},1}^i e_{\vec{k},2}^j - e_{\vec{k},1}^j e_{\vec{k},2}^i = \varepsilon_{ijl} (\vec{e}_{\vec{k},1} \wedge \vec{e}_{\vec{k},2})^l = \varepsilon_{ijl} \frac{k^l}{|\vec{k}|}$$

será entonces

$$\begin{aligned} \{E^i(\vec{x}_1, t_1), B^j(\vec{x}_2, t_2)\} &= \frac{1}{V\varepsilon_0} \sum_{\vec{k},\sigma} \varepsilon_{ijl} k^l \sin(\vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) - c|\vec{k}|(t_1 - t_2)) = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{\partial}{\partial x^l} D(\vec{x}_1 - \vec{x}_2, t_1 - t_2) \end{aligned}$$

Veremos más adelante que la función $D(\vec{x}, t)$ tiene una relación directa con la funciones de Green y las teorías de causalidad.

Ondas planas electromagnéticas

Como hemos visto, el campo electromagnético, desarrollado en ondas planas viene dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} i\omega \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} - \vec{e}_{\vec{k},\sigma}^* a_{\vec{k},\sigma}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) \\ \vec{B} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k},\sigma} i\vec{k} \wedge \left(\vec{e}_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} - \vec{e}_{\vec{k},\sigma}^* a_{\vec{k},\sigma}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \right) \end{aligned}$$

En el caso de una onda plana monocromática con una sola frecuencia, el vector eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí y estarían en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda plana.

La energía total del campo electromagnético promediada en el tiempo vendrá dada por

$$\mathcal{W}_c = H_c = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{V_\infty} \langle \vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2 \rangle dV = 2\varepsilon_0 \sum_{\vec{k},\sigma} c^2 \vec{k}^2 a_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma}^*$$

El hamiltoniano que coincide con la energía de un sistema de osciladores se denomina función de Hamilton del campo.

El momento lineal total del campo promediado en el tiempo viene dado por

$$\vec{P}_c = \vec{G} = \varepsilon_0 \int \langle \vec{E} \wedge \vec{B} \rangle dV = 2\varepsilon_0 \sum_{\vec{k},\sigma} c|\vec{k}| \vec{k} a_{\vec{k},\sigma} a_{\vec{k},\sigma}^*$$

Vemos que se verifica que $|\vec{G}| = \mathcal{W}_c/c$ como era de esperar.

Cada onda plana parcial lleva asociada una cantidad de momento

$$\vec{G} = \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{g}_{\vec{k}, \sigma}$$

$$\vec{g}_{\vec{k}, \sigma} = 2\varepsilon_0 c |\vec{k}| \vec{a}_{\vec{k}, \sigma} a_{\vec{k}, \sigma}^*$$

y de energía

$$\mathcal{W}_c = \sum_{\vec{k}, \sigma} w_{\vec{k}, \sigma}$$

$$w_{\vec{k}, \sigma} = 2\varepsilon_0 c^2 k^2 a_{\vec{k}, \sigma} a_{\vec{k}, \sigma}^*$$

Los vectores unitarios $\vec{e}_{\vec{k}, \sigma}$ nos dan la dirección de vibración del campo eléctrico para cada onda plana parcial, y existen dos vectores, $\vec{e}_{\vec{k}, 1}$ y $\vec{e}_{\vec{k}, 2}$, perpendiculares entre ellos, que definen las direcciones de polarización lineal de la onda plana. Además verifican $\vec{e}_{\vec{k}, 1} \wedge \vec{e}_{\vec{k}, 2} = \vec{k}/k$, por lo que se encuentran en el plano perpendicular a la dirección de propagación.

Los vectores $\vec{e}_{\vec{k}, 1}$ y $\vec{e}_{\vec{k}, 2}$ definen dos direcciones de polarización lineal. La polarización circular vendrá definida en función de los vectores

$$\vec{e}_{\vec{k}, +} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{\vec{k}, 1} + i\vec{e}_{\vec{k}, 2})$$

$$\vec{e}_{\vec{k}, -} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_{\vec{k}, 1} - i\vec{e}_{\vec{k}, 2})$$

El momento angular de espín clásico promediado en el tiempo será entonces

$$\vec{L}_{\text{espin}} = \varepsilon_0 \int_V \langle \vec{E} \wedge \vec{A} \rangle d^3x = 2\varepsilon_0 c \sum_{\vec{k}, \sigma} \vec{k} (a_{\vec{k}, +} a_{\vec{k}, +}^* - a_{\vec{k}, -} a_{\vec{k}, -}^*)$$

Es decir, el momento angular de espín clásico es proporcional a la diferencia entre las ondas polarizadas circularmente a la derecha y a la izquierda.

Una conclusión importante, es que como vimos, la hipótesis de Einstein de que un fotón tiene un momento igual a $\hbar \vec{k}$, nos lleva ahora a que un fotón polarizado debe tener un momento angular asociado

$$\vec{l}_+ = \frac{\vec{g}_{\vec{k}, +}}{|\vec{k}|} = \hbar \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

$$\vec{l}_- = -\frac{\vec{g}_{\vec{k}, -}}{|\vec{k}|} = -\hbar \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

Aunque el espín es un concepto que sólo se justifica a través de la mecánica cuántica, no deja de sorprender que el electromagnetismo clásico se anticipe ya a algunas de las propiedades cuánticas de la luz. Esto se debe a que si los efectos de un fenómeno cuántico, o la relación de dos magnitudes físicas, no depende de la constante de Planck, entonces las ecuaciones análogas de la física clásica son las mismas, ya que la física clásica es el límite de la mecánica cuántica cuando se hace nula la constante de Planck, para partículas bosones como los fotones.

En el capítulo de teorías vectoriales e invariantes vimos que $\vec{L}_{\text{espín}}$ es una magnitud que se conserva en el tiempo. Ahora vemos que está asociada a la polarización circular, por lo que se denomina espín clásico.

Otro aspecto de interés es que, como una onda plana lleva una densidad de momento

$$\vec{g}_{\vec{k},\sigma} = \frac{\omega_{\vec{k},\sigma}}{c} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{c} \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

Ejercerá también una presión. Si toda la onda fuese absorbida por un panel, esto daría lugar a una presión

$$P_r = c \Sigma_{\vec{k},\sigma} \vec{g}_{\vec{k},\sigma} = \Sigma_{\vec{k},\sigma} \omega_{\vec{k},\sigma} = \omega_c$$

Si se introdujesen desfases aleatorios en las $\sigma_{\vec{k},\sigma}$, estos quedarían cancelados al calcular la energía media medida. Este efecto es lo que nos permite ver bajo iluminación no coherente como la de una bombilla.